

М. Ю. Медведик, А. А. Щукина, И. А. Родионова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТЕЛЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ, РАСПОЛОЖЕННОМ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

Аннотация. Цель работы: изучение процессов распространения электромагнитных волн внутри тел, расположенных в свободном пространстве. Исследование свойств поведения поверхностных токов на теле сложной геометрической формы. Рассматриваемая задача исследовалась методом объемных интегральных уравнений. Для тела канонической формы, имеющего вид прямоугольного параллелепипеда, строится расчетная сетка. Вводятся базисные функции, удовлетворяющие условию аппроксимации. Применяя проекционный метод, задача сводится в системе линейных алгебраических уравнений. Используя субиерархический метод, задача решается на телах сложной геометрической формы. Предложен эффективный метод решения рассматриваемой задачи на телах сложной геометрической формы. Применяя описанный метод, получены решения задач дифракции на нескольких однородных телах, имеющих различную геометрическую форму.

Ключевые слова: задача дифракции, интегральное уравнение, метод коллокации, численные результаты.

М. Yu. Medvedik, A. A. Shchukina, I. A. Rodionova

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON THE COPOUND BODY, LOCATED IN FREE SPACE

Abstract. Objective of the work is to study the process of electromagnetic waves distribution in bodies located in free space and the behavior of the surface currents on the body of arbitrary geometrical shape. To solve the said problem the authors use the method of volume singular integral equations. For rectangular parallelepiped-shaped bodies the researchers construct a computational grid. The authors introduce basic functions that comply with the condition of approximation. The integral equation is reduced to a system of linear algebraic equation with the help of a projection method. Using the subhierarchy method the problem is solved on the body of arbitrary geometrical shape. The researchers suggest an efficient numerical solution to the considered problem. Via the said method the authors have obtained the diffraction problem solutions for several homogeneous bodies of different geometrical shape.

Key words: problem of diffraction, integral equation, method of collocation, numerical results.

Введение

Исследование задач математической физики и, в частности, теории дифракции представляет большой теоретический и практический интерес. Од-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 11-07-00330-а, 12-07-97010-р_а и ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение № 14.В37.21.1950.

ной из актуальных задач электродинамики, является определение рассеянного поля на неоднородных диэлектрических телах. Рассмотрим задачу рассеяния электромагнитной волны на трехмерных неоднородных телах. В подобных задачах иногда удается получить аналитические решения для фигур простой геометрической формы [1, 2], но в большинстве случаев удается получить только численные решения. Рассмотрим задачу распространения электромагнитного поля на неоднородном теле сложной геометрической формы, расположенном в свободном пространстве. Существует два основных подхода решения подобных задач. Первый подход связан с применением конечно разностных методов. Данный подход позволяет достаточно просто свести краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Однако данный подход имеет существенный недостаток. Его суть – в необходимости моделировать условия излучения на бесконечности. Для этого тело заключается в область как можно больших размеров (моделирующую бесконечность) и строится расчетная сетка внутри этой области. Это приводит к созданию разреженных матриц огромных размеров и поиску эффективных методов их решения. Второй подход заключается в сведении краевой задачи к объемному сингулярному интегральному уравнению на теле [3]. Данный подход позволяет строить расчетную сетку только на теле, что является несомненным преимуществом. Однако полученное объемное сингулярное интегральное уравнение имеет особенность в области интегрирования, поэтому необходимо разрабатывать эффективные методы решения данного уравнения. Один из таких методов представлен в [3, 4].

Следует отметить, что для тел, размеры которых значительно меньше или значительно больше длины волны, возможно применение асимптотических методов. Однако в «резонансном» случае, когда размеры тела сравнимы с длиной волны, применение асимптотических методов невозможно, и приходится решать задачу численно с помощью современных компьютеров.

Также малоэффективным является использование пакетного подхода при решении данных задач. Большинство пакетов прикладных программ используют в своей основе конечноразностные методы, что по описанным выше причинам не дает достаточной точности решения.

В настоящее время, благодаря быстрому развитию компьютерной техники и разработке новых подходов и методов, появились численные решения поставленной задачи. Однако большинство решений выполнено на телах простой геометрической формы. В данной работе мы приводим результаты решения поставленной задачи на телах сложной геометрической формы, полученных субиерархическим методом [5]. Представленный в статье метод позволяет решать подобные задачи на телах сложной геометрической формы, опираясь на результаты, полученные при решении задачи на теле базовой (канонической) формы [6–16].

1. Постановка задачи

Пусть тело $Q \in R^3$, расположенное в свободном пространстве, имеет диэлектрическую проницаемость, характеризующуюся функцией $\varepsilon(x)$, и кусочно-гладкую границу ∂Q . Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля на теле Q (рис. 1). Вне тела Q диэлектрическая проницаемость

$\varepsilon = \varepsilon_0$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства. Источник поля $J_E^0 \in R^3 / \bar{Q}$ находится за пределами $\bar{Q}$. Падающее поле выражается через ток J_E^0 [3].

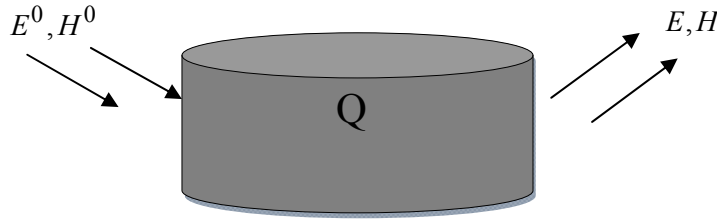


Рис. 1. Тело Q , расположенное в свободном пространстве

Данная задача описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \vec{E} + \vec{J}_E^0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H}. \end{cases} \quad (1)$$

Для $\vec{E}, \vec{H}$ должны выполняться краевые условия на границе тела:

$$[\vec{E}_\tau]_{|\partial Q} = 0, \quad [\vec{H}_\tau]_{|\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ – скачок предельных значений.

Для $\vec{E}, \vec{H}$ должны выполняться краевые условия излучения на бесконечности:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) = o\left(\frac{1}{r} \right), \quad \left(\frac{\partial H}{\partial r} - ikH \right) = o\left(\frac{1}{r} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Рассматриваемая задача может быть сведена к объемному интегральному сингулярному уравнению:

$$\vec{E}^0(x) = \xi(x) \vec{J}(x) - k_0^2 \int_Q G(r) \vec{J}(y) dy - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q G(r) \vec{J}(y) dy, \quad x \in \Pi. \quad (4)$$

Данное уравнение может быть решено различными численными методами (мы выбрали метод коллокации) с целью сокращения числа операций.

2. Метод коллокации

Рассмотрим метод коллокации для численного решения объемного сингулярного интегрального уравнения (4). Здесь Π – прямоугольный параллелепипед $\Pi = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$, расположенный в свободном пространстве, имеет диэлектрическую проницаемость, характеризующуюся функцией $\varepsilon(x)$; $G(x, y)$ – функция Грина вида $G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$;

$\vec{E}^0(x)$ – падающее поле; $\vec{J}(x)$ – токи поляризации внутри тела;
 $\xi(x) = \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right)^{-1}$ и $\vec{J}(x) = \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right)^{-1} \vec{E}(x)$.

Построим на Π равномерную сетку, т.е. разобьем Π на элементарные подобласти Π_i с кусочно-гладкими границами $\partial\Pi_i$ так, чтобы выполнялись условия $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bar{\Pi} = \bigcup_i \bar{\Pi}_i$ (рис. 2).

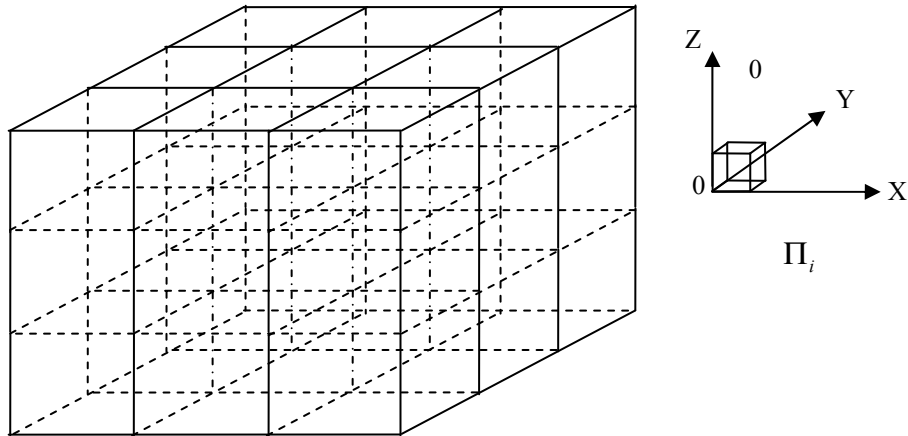


Рис. 2. Построение сетки

Будем использовать трехиндексную нумерацию подобластей

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

Выберем в каждой подобласти Π_i точку (узел) коллокации x^i . Рассмотрим базисные функции

$$v_i = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_i, \\ 0, & x \notin \Pi_i. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0.$$

Для уравнения $A\varphi = f$ ($\varphi, f \in X$) с линейным ограниченным оператором $A: X \rightarrow X$ в гильбертовом пространстве X рассмотрим метод коллока-

ции, который формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A \varphi_n = P_n f$. Здесь $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n : X \rightarrow X_n$ – оператор проектирования на конечномерное подпространство, который определяется ниже.

Уравнение $P_n A \varphi_n = P_n f$ эквивалентно следующему:

$$(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в схему метода коллокации, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (A v_k)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Расширенную матрицу, полученную из метода коллокации, удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right). \quad (7)$$

Элементы B_k и A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^s = E_0^k(x_s); \quad (8)$$

$$A_{kl}^{sj} = \xi_{kl} f_j^l(x_s) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G(x_s, y) f_j^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) f_j^l(y) dy. \quad (9)$$

Здесь $x_s = (x_{s1}, x_{s2}, x_{s3})$ точки коллокации с координатами

$$x_{s1} = (s_1 + 0,5)h_1, \quad x_{s2} = (s_2 + 0,5)h_2, \quad x_{s3} = (s_3 + 0,5)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad s_1, s_2, s_3, \quad j_1, j_2, j_3 = 0, \dots, n-1.$$

Продифференцировав выражение (9), можно расписать отдельно формулы для диагональных и недиагональных блоков матрицы.

Обозначим $r = |x_s - y|$, тогда функция Грина примет вид

$$G(x_s, y) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Рассмотрим случай $s \neq j$ и $k = l$:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{e^{ikr} ik \frac{(x_l - y_l)}{r} r - e^{ikr} \frac{(x_l - y_l)}{r}}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l} \left[e^{ikr} \left(\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right) \right].$$

Продифференцируем отдельно e^{ikr} и $\left(\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} e^{ikr} = e^{ikr} \frac{ik(x_l - y_l)}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right] = \frac{ikr^2 - 2ik(x_l - y_l)}{r^4} - \frac{r^2 - 3(x_l - y_l)^2}{r^5}.$$

Подставим полученные результаты для повторного дифференцирования по x_l . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) \right] &= e^{ikr} \frac{ik(x_l - y_l)}{r} \cdot \frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - e^{ikr} \frac{ik(x_l - y_l)}{r} \cdot \frac{(x_l - y_l)}{r^3} + \\ &+ e^{ikr} \frac{ikr^2 - 2ik(x_l - y_l)}{r^4} - e^{ikr} \frac{r^2 - 3(x_l - y_l)^2}{r^5} = -\frac{e^{ikr}}{r} \frac{k^2(x_l - y_l)^2}{r^2} + \\ &+ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{ik(r^2 - 3(x_l - y_l)^2)}{r^3} - \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3(x_l - y_l)^2}{r^4} \right) = \\ &= G(x_s, y) \left(\frac{(x_l - y_l)^2}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k_0^2 \right) + \frac{ik_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $s \neq j$ и $k = l$ матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned} A_{ll}^{sj} &= \xi_{ll} f_j^l(x_s) - k_0^2 \int_Q G(x_s, y) f_j^l(x_s) dy - \\ &- \int_Q G(x_s, y) \left(\frac{(x_l - y_l)^2}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k_0^2 \right) + \frac{ik_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right) f_j^l(x_s) dy, \end{aligned} \quad (10)$$

где $r = |x_s - y|$.

Рассмотрим случай $s \neq j$ и $k \neq l$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{e^{ikr} ik \frac{(x_l - y_l)}{r} r - e^{ikr} \frac{(x_l - y_l)}{r}}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[e^{ikr} \left(\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right) \right].$$

Также проведем дифференцирование по частям:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} e^{ikr} = e^{ikr} \frac{ik(x_k - y_k)}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right] = \frac{-2ik(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^4} + \frac{3(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5}.$$

Подставим полученные результаты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) \right] &= e^{ikr} \frac{ik(x_k - y_k)}{r} \left(\frac{ik(x_l - y_l)}{r^2} - \frac{(x_l - y_l)}{r^3} \right) + \\ &+ e^{ikr} \left(\frac{-2ik(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^4} + \frac{3(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} \right) = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k_0^2 \right) = \\ &= G(x_s, y) \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k_0^2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для $s \neq j$ и $k \neq l$ матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned} A_{kl}^{sj} &= \xi_{kl} f_j^l(x_j) - \\ &- \int_Q G(x_s, y) \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k_0^2 \right) f_j^l(x_s) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где $r = |x_s - y|$.

Выведем формулу выделения особенности для совпадающих носителей.

Распишем функцию Грина следующим образом:

$$G(x_s, y) = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}.$$

Обозначим через $\hat{g}(r) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r}$ и вычислим

$$\left(\frac{k^2}{r} + (\text{grad div} + k^2) \cdot \hat{g} \right) = \frac{k^2}{r} + G(x_s, y) \left[\frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3ik}{r} - k^2 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \Big] + \frac{1}{r^3} - \frac{3(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} + k^2 \hat{g} = \frac{k^2}{r} + \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \times \\
 & \times \left(\frac{3e^{ikr}}{r^3} - \frac{3ikre^{ikr}}{r^3} \right) - G(x_s, y) \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} k^2 + \frac{ike^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}}{r^3} + \frac{1}{r^3} - \\
 & - \frac{3(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} + k^2 G(x_s, y) - \frac{k^2}{r} = k^2 G(x_s, y) \left[1 - \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \right] + \\
 & + \frac{k^2}{r} \left[\frac{3(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^5} \left(\frac{e^{ikr} - ikre^{ikr} - 1}{r^2 k^2} \right) - \left(\frac{e^{ikr} - ikre^{ikr} - 1}{r^2 k^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Итак, формула для выделения особенности для совпадающих носителей $s = j$ и $k = l$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_{ll}^{jj} = & \xi_{ll} f_j^l(x_j) - \alpha_l \delta_{ll} - \delta_{ll} \int_Q k_0^2 G(x_j, y) \left(1 - \frac{(x_l - y_l)^2}{r^2} \right) f_j^l(x_j) + \\
 & + \frac{k_0^2}{r} \left(3\Phi(r) \frac{(x_l - y_l)^2}{r^2} - \Phi(r) \right) f_j^l(x_j) dy. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Для $s = j$ и $k \neq l$

$$\begin{aligned}
 A_{kl}^{jj} = & \xi_{kl} f_j^l(x_j) - \alpha_l \delta_{kl} - \\
 & - \delta_{kl} \int_Q k_0^2 G(x_j, y) \left(1 - \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} \right) f_j^l(x_j) + \\
 & + \frac{k_0^2}{r} \left(3\Phi(r) \frac{(x_l - y_l)(x_k - y_k)}{r^2} - \Phi(r) \right) f_j^l(x_j) dy. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(r) = \frac{e^{ikr} - ikre^{ikr} - 1}{r^2 k^2}$ – всюду дифференцируемая функция, а

$\alpha_l = 1/3$ в случае, если $h_1 = h_2 = h_3$.

3. Численные результаты

Пусть фигура Π имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Будем называть ее фигурой канонической формы. Построим расчетную сетку для фигуры Π (см. рис. 2). Алгоритм построения расчетной сетки описан в [6]. Используем субиерархический метод для получения решения интегрального уравнения на теле сложной геометрической формы Q . Для этого создадим вектор геометрии W для фигуры Q [6]. Воспользуемся матрицей полученной методом коллокации для фигуры канонической формы. Для ре-

шения задачи дифракции на теле сложной геометрической формы Q необходимо, чтобы Q целиком вмещалось в прямоугольный параллелепипед Π и состояло из элементов сетки Π_i . Если фигура сложной формы получена из фигуры канонической формы путем исключения одного носителя Π_q , то решение интегрального уравнения производится на подматрице, представленной ниже. Вектор W описывает геометрию фигуры, выделенной из фигуры канонической формы:

$$\begin{pmatrix} X_{1,1}^{(m+1)} \\ X_{1,2}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{q-1,q}^{(m+1)} \\ X_{q,q}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{n,n}^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{1,1,1} X_{1,1} & a_{1,2}^{1,1,2} X_{1,2} & \dots & a_{1,q-1}^{1,1,q-1} X_{1,q-1} & 0 & a_{1,q+1}^{1,1,q+1} X_{1,q+1} & \dots & a_{1,n}^{1,1,n} X_{1,n} \\ a_{1,2}^{1,2,1} X_{1,1} & a_{1,2}^{1,2,2} X_{1,2} & \dots & a_{1,2}^{1,2,q-1} X_{1,q-1} & 0 & a_{1,2}^{1,2,q+1} X_{1,q+1} & \dots & a_{1,2}^{1,2,n} X_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1,q}^{1,q-1,1} X_{1,1} & a_{q-1,q}^{1,q-1,2} X_{1,2} & \dots & a_{q-1,q}^{1,q-1,q-1} X_{1,q-1} & 0 & a_{q-1,q}^{1,q-1,q+1} X_{1,q+1} & \dots & a_{q-1,q}^{1,q-1,n} X_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{q,q}^{1,q,1} X_{1,1} & a_{q,q}^{1,q,2} X_{1,2} & \dots & a_{q,q}^{1,q,q-1} X_{1,q-1} & 0 & a_{q,q}^{1,q,q+1} X_{1,q+1} & \dots & a_{q,q}^{1,q,n} X_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,n}^{1,n,1} X_{1,1} & a_{n,n}^{1,n,2} X_{1,2} & \dots & a_{n,n}^{1,n,q-1} X_{1,q-1} & 0 & a_{n,n}^{1,n,q+1} X_{1,q+1} & \dots & a_{n,n}^{1,n,n} X_{1,n} \end{pmatrix}$$

Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера фигуры и размера сетки.

Рассматриваемый метод позволил избежать повторных расчетов, связанных с вычислением матричных элементов. Особенно хорошо данный метод проявляет себя при расчете серии задач на телах различной формы. Очень эффективно использование данного метода для решения больших инженерных задач.

Приведем результаты решения интегрального уравнения на кубе с размерной сеткой $8 \times 8 \times 8$ (рис. 3).

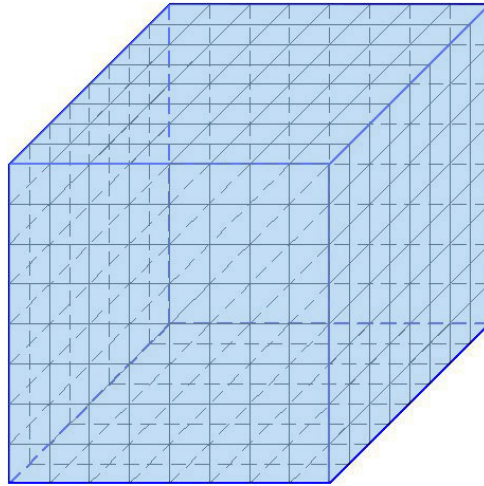


Рис. 3. Куб с размерной сеткой $8 \times 8 \times 8$

Волна падает вдоль оси Oy . Правая часть матричного уравнения равна единице. На рис. 4 представлены значения модуля второй компоненты электрического поля на втором, пятом и восьмом слоях соответственно.

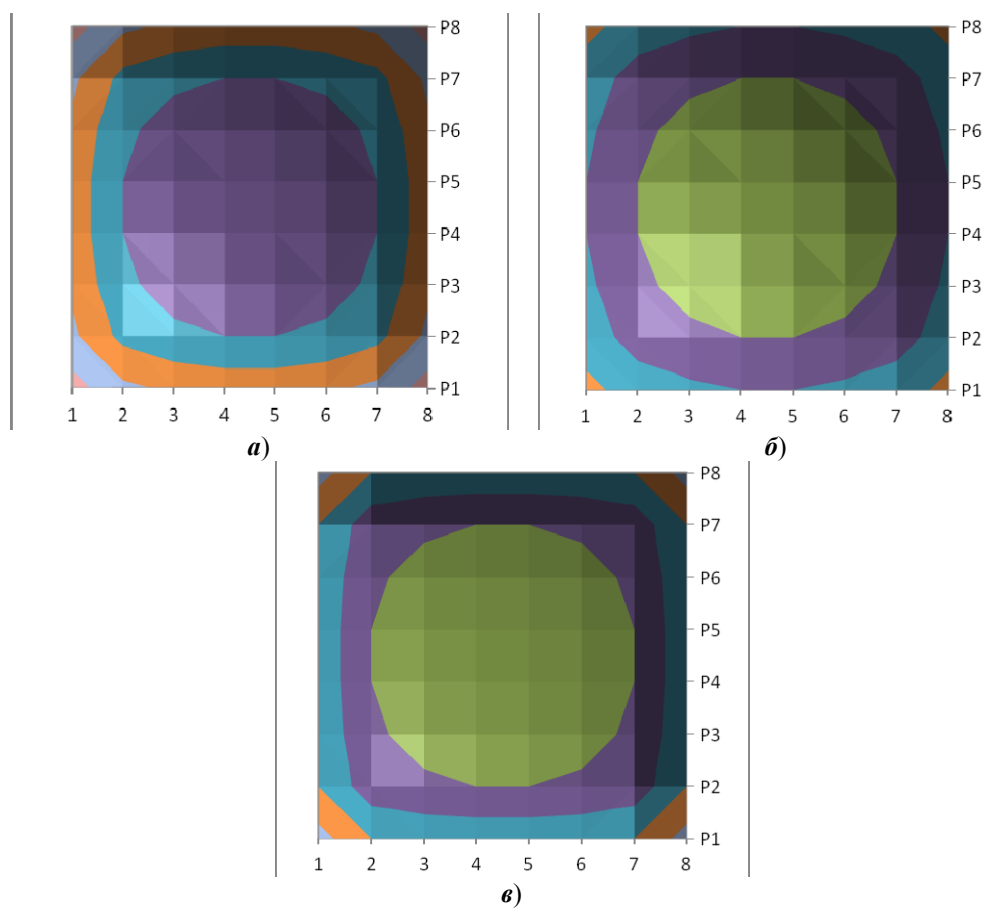


Рис. 4. Второе, пятое и восьмое сечения куба, сетка $8 \times 8 \times 8$, волновое число внутри тела $k = 0,8$

Рассмотрим тело Q более сложной геометрической формы (рис. 5, 6).

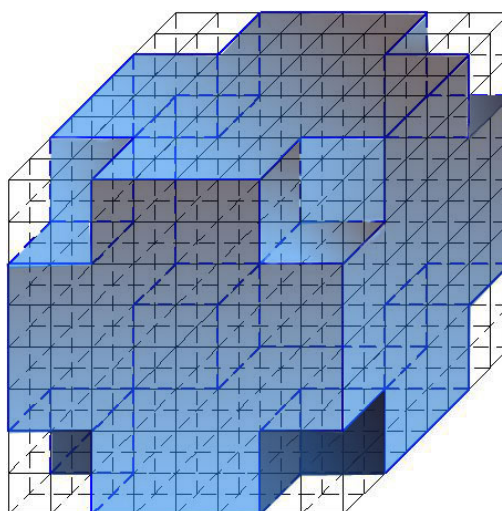
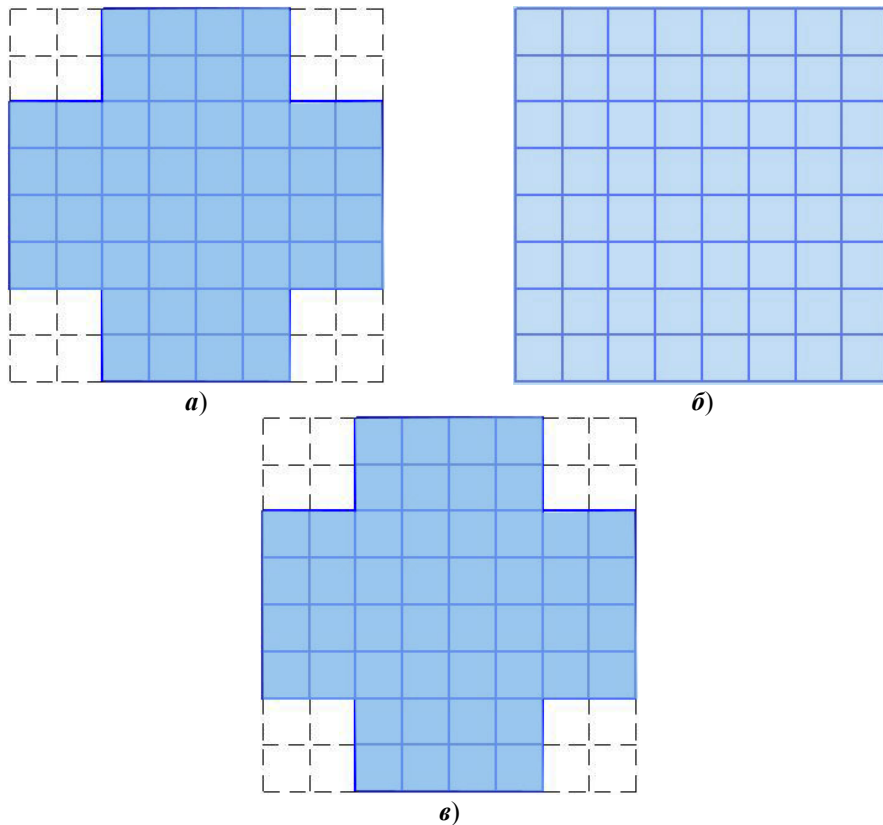


Рис. 5. Тело Q , «выделенное» из тела канонической формы

Рис. 6. Проекция фигуры Q (рис. 4) на оси

При помощи вектора геометрии W описываем фигуру Q . Строим новую сетку и, используя построенный вектор, решаем задачу на фигуре сложной геометрической формы. Решая систему линейных алгебраических уравнений для матрицы, составленной с использованием новой сетки, находим значения поля внутри фигуры сложной формы. Волна также падает вдоль оси Oy . Правая часть матричного уравнения равна единице. На рис. 7 представлены значения модуля второй компоненты электрического поля на втором, пятом и восьмом слоях соответственно.

Решим задачу на теле P несимметричной сложной формы (рис. 8).

На рис. 9 представлены значения модуля второй компоненты электрического поля на втором, пятом и восьмом слоях соответственно.

Заключение

Разработан программный комплекс для решения задачи дифракции электромагнитной волны на теле, расположенном в свободном пространстве. Комплекс позволяет эффективно решать задачи для тел сложной формы. Построенная модель представляет интерес при расчете печатных плат и многослойных структур. Для решения рассматриваемой задачи использовался суперкомпьютерный комплекс Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

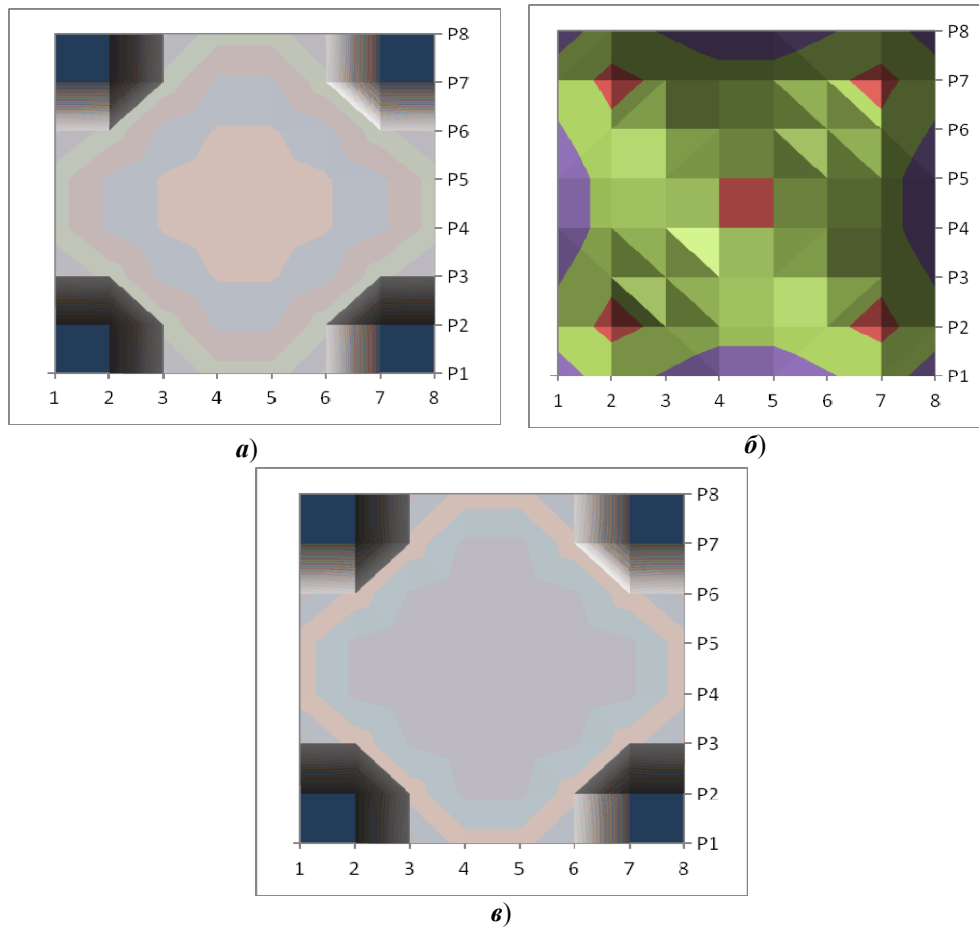


Рис. 7. Второе, пятое и восьмое сечения тела Q (рис. 4), сетка $8 \times 8 \times 8$, волновое число внутри тела $k = 0,8$

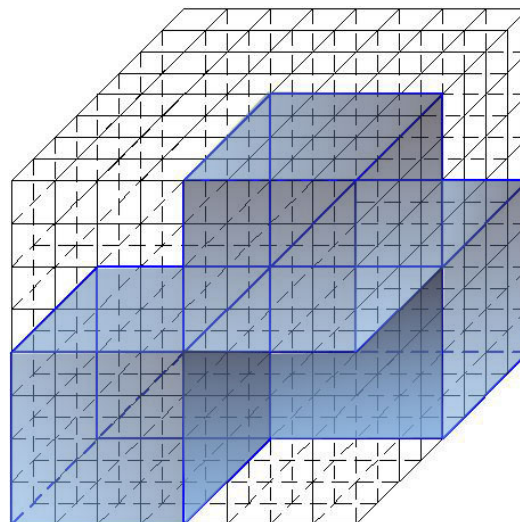


Рис. 8. Тело P несимметричной сложной формы, «выделенное» из тела канонической формы

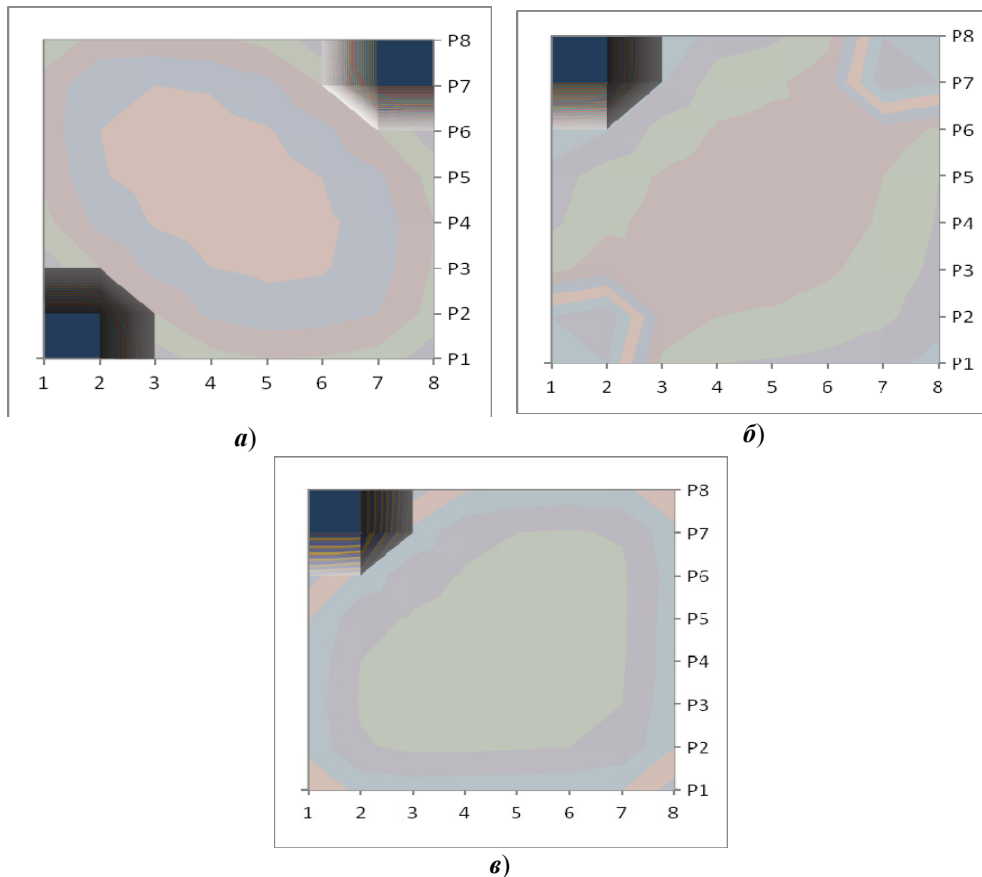


Рис. 9. Второе, пятое и восьмое сечения тела P (рис. 8), сетка 8×8 , волновое число внутри тела $k = 0,8$

Список литературы

1. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 44–53.
2. **Гришина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на двух секциях с разной диэлектрической проницаемостью, расположенных в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гришина, Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 73–81.
3. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М.: Радио и связь, 1998. – 160 с.
4. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М.: Радиотехника, 1996. – 176 с.
5. **Медведик, М. Ю.** Применение субиерархического метода в задачах электродинамики / М. Ю. Медведик // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 87–97.
6. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной

- диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–54.
7. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
8. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 4. – С. 441–446.
9. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
10. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
11. **Медведик, М. Ю.** Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 54–69.
12. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
13. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 82–88.
14. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 8. – С. 940–945.
15. **Медведик, М. Ю.** Метод коллокации для решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле, расположенном в резонаторе / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2. – С. 28–40.
16. **Медведик, М. Ю.** Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном резонаторе / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3. – С. 22–31.

References

1. Gurina E. E., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 2, pp. 44–53.
2. Grishina E. E., Derevyanchuk E. D., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki*

- [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 4, pp. 73–81.
3. Samokhin A. B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii* [Integral equations and iteration methods in magnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998, 160 p.
 4. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* [Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens]. Moscow: Radiotekhnika, 1996, 176 p.
 5. Medvedik M. Yu. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods in programming]. 2012, vol. 13, pp. 87–97.
 6. Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2008, no. 3, pp. 39–54.
 7. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Sobolev S. I. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods in programming]. 2005, vol. 6, pp. 99–108.
 8. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2008, vol. 53, no. 4, pp. 441–446.
 9. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2008, no. 2, pp. 2–14.
 10. Smirnov Yu. G., Medvedik M. Yu., Vasyunin D. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2009, no. 3, pp. 71–87.
 11. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2009, no. 4, pp. 54–69.
 12. Medvedik M. Yu., Mironov D. A., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 2, pp. 32–43.
 13. Medvedik M. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 4, pp. 82–88.
 14. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2011, vol. 56, no. 8, pp. 940–945.
 15. Medvedik M. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2011, no. 2, pp. 28–40.
 16. Medvedik M. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2011, no. 3, pp. 22–31.

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yur'evich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza State
University (Penza, 40 Krasnaya str.)

Щукина Анна Александровна

студентка, Пензенский государственный
университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Shchukina Anna Aleksandrovna

Student, Penza State University
(Penza, 40 Krasnaya str.)

Родионова Ирина Анатольевна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Rodionova Irina Anatol'evna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza State
University (Penza, 40 Krasnaya str.)

УДК 517.3

Медведик, М. Ю.

Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на теле сложной формы, расположенном в свободном пространстве /
М. Ю. Медведик, А. А. Щукина, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 17–32.